Prova scritta di Algebra 1
6 aprile 2004

Esercizio 1. Siano $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ due applicazioni.

1. Dimostrare che se $g \circ f$ è iniettiva allora f è iniettiva.
2. Dimostrare che se $g \circ f$ è suriettiva allora g è suriettiva.
3. Mostrare dei controesempi che per nessuna delle implicazioni precedenti vale il viceversa.

Esercizio 2. Nell'insieme $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R} = \{(\alpha, \beta) | \alpha,\ \beta \in \mathbb{R},\ \alpha \neq 0\}$ si definisca un'operazione $\star$ ponendo

$$(\alpha, \beta) \star (\alpha', \beta') = (\alpha \cdot \alpha', \beta \cdot \alpha' + \beta')$$

per ogni (α, β) e $(\alpha', \beta') \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

1. Si dimostri che $(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, \star)$ è un gruppo.
2. Si dimostri che $S = \{(\alpha, \beta) | \alpha,\ \beta \in \mathbb{R},\ \alpha = 1\}$ è un sottogruppo normale di $(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, \star)$.
3. Sia $f : (\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, \star) \to (\mathbb{R}^*, \cdot)$ un'applicazione definita da $f(\alpha, \beta) = \alpha$; dimostrare che f è un omomorfismo suriettivo di gruppi.

($\cdot$ rappresenta l'usuale moltiplicazione fra numeri reali)

Esercizio 3. Per ogni G gruppo abeliano definiamo

$$T(G) = \{g \in G | \exists n \in \mathbb{N},\ n > 0 \text{ tale che } g^n = 1_G\}$$

1. Dimostrare che $T(G)$ è un sottogruppo di G.
2. Dimostrare che $T(G/T(G)) = \{1_{G/T(G)}\}$

Esercizio 4.

1. Si consideri in S_9 la permutazione $\tau = (1, 2, 7, 5)(5, 4, 3)(2, 4, 9)$; si calcolino per τ e per τ^{-1} la scomposizione in cicli disgiunti ed il segno.
2. Fissiamo μ una permutazione in S_n e definiamo nell'insieme $\{1, \ldots, n\}$ la seguente relazione

   $$i \sim j \quad \Leftrightarrow \quad \exists a \in \mathbb{Z} \text{ tale che } \mu^a(i) = j$$

   Dimostrare che $\sim$ è una relazione d'equivalenza.