Prova scritta di Algebra 2
4 luglio 2005

Esercizio 1.

1. Individuare quali delle seguenti coppie sono costituite da due gruppi isomorfi (motivare la risposta).

   a) $\mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_2$ e $\mathbb{Z}_{18}$ b) $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_6$ e $\mathbb{Z}_{18}$
   c) $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_{28}$ e $\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{14}$
   d) $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2$ e $\mathbb{Z}_{18}$

2. Si dimostri che $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2$ è un gruppo ciclico individuando esplicitamente un generatore e verificando che questo genera il gruppo considerato.

Esercizio 2.

1. Sia R un anello unitario, si dimostri che un divisore dello zero non può essere invertibile.

2. Si dimostri che in ogni dominio di integrità vale la legge di cancellazione.

3. Sia D un dominio d'integrità tale che ogni elemento in D non nullo e non invertibile è irriducibile; si dimostri che D è un campo.

Esercizio 3.

1. In $\mathbb{Z}_3[x]$ trovare tutti i polinomi irriducibili di grado due.

2. Trovare il polinomio minimo ed il grado su $\mathbb{Q}$ del numero complesso $i\sqrt{5} - 2$.

Esercizio 4.

1. Sia $(L, \leq)$ un reticolo, dimostrare che per ogni $x, y, z \in L$

$$x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z).$$

2. Sia $(L, \leq)$ un reticolo booleano e siano $x, y \in L$; dimostrare che $x \vee y = 1$ se e solo se $x \vee y' = x$.