Prova scritta di Algebra 1
4 luglio 2005

Esercizio 1. Siano $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ due applicazioni.

1. Dimostrare che se g ed f sono iniettive allora $g \circ f$ è iniettiva.
2. Dimostrare che se g ed f sono suriettive allora $g \circ f$ è suriettiva.
3. Mostrare dei controesempi che per nessuna delle implicazioni precedenti vale il viceversa.

Esercizio 2. Nell'insieme F costituito da tutte le applicazioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ definiamo l'operazione $\star$ nel seguente modo:

$$\text{per ogni } x \in \mathbb{R} \quad f \star g(x) = f(x) \cdot g(x).$$

1. Si mostri che $(F, \star)$ è un monoide abeliano.
2. Sia x_0 un numero reale; si consideri $\phi : (F, \star) \to (\mathbb{R}, \cdot)$ definita da $\phi(f) = f(x_0)$. Si dimostri che ϕ è un omomorfismo di monoidi.
3. Sia x_0 un numero reale e $\sim$ la seguente relazione in F:

   $$f \sim g \Leftrightarrow \exists \delta > 0 \text{ tale che } \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \text{ vale } f(x) = g(x).$$

   Si verifichi che $\sim$ è una relazione di equivalenza compatibile con $\star$.

Esercizio 3.
1. Si consideri in S_7 la permutazione $\tau = (1, 2, 4, 6)(3, 5)$. Si calcolino il segno, le orbite, la scomposizione in cicli disgiunti e una scomposizione in trasposizioni delle seguenti permutazioni τ, τ^2, τ^3.
2. Si dimostri che S_7 non è un gruppo abeliano.
3. Si dimostri che S_n con $n \geq 3$ non è un gruppo abeliano.

Esercizio 4. Sia G un gruppo, sia

$$Z(G) = \{g \in G | hg = gh \quad \forall h \in G\}.$$

1. Verificare che $Z(G)$ è un sottogruppo normale di G.
2. Dimostrare che se $G/Z(G)$ è un gruppo ciclico allora G è abeliano.