Prova scritta di Algebra 1
4 dicembre 2003

Esercizio 1. Sia $f : X \to Y$ un'applicazione.

1. Verificare che per ogni A e B sottoinsiemi di X vale che
$$f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B).$$
2. Trovare un esempio in cui $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$.
3. Verificare che l'applicazione f è iniettiva se e solo se per ogni A e B sottoinsiemi di X abbiamo che $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

Esercizio 2. Nell'insieme $\mathbb{Z}$ sia $\sim$ la relazione definita da:
$$a \sim b \Leftrightarrow \text{ esistono } n, m \in \mathbb{N} \text{ tali che } 2^n a = 2^m b.$$

1. Si dimostri che $\sim$ è una relazione di equivalenza.
2. Si dimostri che $\sim$ è compatibile con la moltiplicazione $\cdot$ in $\mathbb{Z}$.
3. Sia D l'insieme dei numeri dispari in $\mathbb{Z}$; si dimostri che $D \cup \{0\}$ è un sottomonoide di $(\mathbb{Z}, \cdot)$.
4. Si consideri l'applicazione $\phi : D \cup \{0\} \to \mathbb{Z}/\sim$ definita da $\phi(a) = [a]_\sim$; dimostrare che ϕ è un isomorfismo di monoidi.

Esercizio 3.

1. Si considerino in S_6 le permutazioni $\tau = (1, 2, 5, 6)$ e $\mu = (2, 3, 6)$. Si calcolino il segno, le orbite, la scomposizione in cicli disgiunti e una scomposizione in trasposizioni delle seguenti permutazioni $\tau \circ \mu$, $(\tau \circ \mu)^2$ e $(\tau \circ \mu)^3$.
2. Sia G un sottogruppo di A_n con $n \geq 3$. Dimostrare che se G contiene tutti i cicli di lunghezza tre allora $G = A_n$.

Esercizio 4. Sia G un gruppo ed S un suo sottogruppo. Se g è un elemento di G definiamo:
$$SgS = \{sgs' | s, s' \in S\}.$$

1. Si dimostri che SgS è un sottogruppo se e solo se g è contenuto in S.
2. Si dimostri che al variare di g in G, gli insiemi SgS formano una partizione di G.