Prova scritta di Algebra 2
29 giugno 2004

Esercizio 1.

1. Sia C_8 il gruppo ciclico di ordine otto; fissato un generatore, individuare i sottogruppi di C_8 e per ogni sottogruppo i generatori.
2. Sia $f : G \longrightarrow G'$ un omomorfismo di gruppi e G un gruppo ciclico.
   (a) Si dimostri che $f(G)$ è un sottogruppo ciclico di G'.
   (b) Si dimostri che se G è un gruppo finito allora $f(G)$ è un gruppo finito e l'ordine di $f(G)$ divide l'ordine di G.
   (c) Si dimostri che se anche G' è un gruppo finito il cui ordine è coprimo con l'ordine di G allora $f(g) = 1_{G'}$ per ogni $g \in G$.

Esercizio 2. Sia X un insieme non vuoto; nell'insieme $\mathbb{R}^X$ (l'insieme costituito da tutte le applicazioni da X ad $\mathbb{R}$) si definiscano l'addizione e la moltiplicazione ponendo:

$$\text{per ogni } x \in X \quad f + g(x) = f(x) + g(x) \quad f \cdot g(x) = f(x) \cdot g(x);$$

1. si dimostri che $(\mathbb{R}^X, +, \cdot)$ è un anello commutativo unitario;
2. si determinino gli elementi invertibili ed i divisori dello zero in $(\mathbb{R}^X, +, \cdot)$;
3. per ogni sottoinsieme $Y \subseteq X$ sia $I_Y = \{f \in \mathbb{R}^X \,|\, f(y) = 0 \,\forall y \in Y\}$; si dimostri che I_Y è un ideale di $\mathbb{R}^X$.

Esercizio 3.

1. Si calcolino il massimo comune divisore ed il minimo comune multiplo dei seguenti polinomi $p(x) = x^4 + x^3 + 3x^2 + x + 2$ e $q(x) = x^4 + x^3 + 4x^2 + x + 3$
2. Trovare il polinomio minimo ed il grado su $\mathbb{Q}$ del numero complesso $i - 2$.

Esercizio 4. Sia $(L, \leq)$ un reticolo distributivo ed a un elemento fissato di L e sia $\phi : L \to L$ l'applicazione definita da $\phi(x) = x \vee a$. Dimostrare che ϕ è un omomorfismo di reticoli. Si dimostri poi che le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1. l'applicazione ϕ è un isomorfismo di reticoli;
2. il reticolo L ammette minimo e a è il minimo di L;
3. l'applicazione $\phi : L \to L$ è l'applicazione identica.