Prova scritta di Algebra 1
29 giugno 2004

Esercizio 1. Sia $f : A \to B$ un'applicazione.

1. Verificare che per ogni B_1 e B_2 sottoinsiemi di B valgono le seguenti uguaglianze:
$$f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) = f^{-1}(B_1 \cap B_2) \quad f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2) = f^{-1}(B_1 \cup B_2)$$
2. Dimostrare che per ogni A_1 sottoinsime di A vale che $A_1 \subseteq f^{-1}(f(A_1))$ e verificare che invece in generale non vale l'uguaglianza $A_1 = f^{-1}(f(A_1))$.

Esercizio 2. Nell'insieme F costituito da tutte le applicazioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ definiamo l'operazione $\star$ nel seguente modo:
$$\text{per ogni } x \in \mathbb{R} \quad f \star g(x) = f(x) \cdot g(x).$$

1. Si mostri che $(F, \star)$ è un monoide abeliano.
2. Si individuino gli elementi invertibili in $(F, \star)$.
3. Sia x_0 un numero reale e $\sim$ la seguente relazione in F:
$$f \sim g \Leftrightarrow \exists \delta > 0 \text{ tale che } \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \text{ vale } f(x) = g(x).$$
Si verifichi che $\sim$ è una relazione di equivalenza.
4. Si dimostri che l'operazione $\star$ è compatibile con $\sim$.

Esercizio 3. Sia G un gruppo e siano N ed M due sottogruppi normali di G.

1. Dimostrare che $N \cap M$ è un sottogruppo normale di G.
2. Dimostrare che se $N \cap M = \{Id\}$ allora per ogni $n \in N$ e per ogni $m \in M$ abbiamo che $nm = mn$.

Esercizio 4. Si consideri $H = \{f \in S_{10} | f(10) = 10\}$ dove S_{10} è il gruppo simmetrico su 10 oggetti .

1. Si dimostri che H è un sottogruppo di S_{10}.
2. Si verifichi qual è l'indice di H in S_{10}.
3. Si verifichi se H è normale in S_{10}.