Prova scritta di Algebra 2
29 gennaio 2007

Esercizio 1.

1. Sia G un gruppo abeliano e siano x ed y due elementi di G; supponiamo che x abbia ordine n ed y abbia ordine m. Si verifichi che l'ordine di xy divide il minimo comune multiplo di m ed n.
2. Si dimostri con un esempio che per un gruppo non abeliano la precedente affermazione non vale in generale.

Esercizio 2. Nell'insieme F costituito da tutte le applicazioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ definiamo le operazioni $\oplus$ e $\odot$ nel seguente modo:

$$\text{per ogni } x \in \mathbb{R} \quad f \oplus g(x) = f(x) + g(x).$$

$$\text{per ogni } x \in \mathbb{R} \quad f \odot g(x) = f(x) \cdot g(x).$$

1. Si mostri che $(F, \oplus, \odot)$ è un anello commutativo con unità.
2. Si verifichi qulai sono in $(F, \oplus, \odot)$ gli elementi invertibili e i divisori dello zero.
3. Sia x_0 un numero reale e $\sim$ la seguente relazione in F:

$$f \sim g \Leftrightarrow \exists \delta > 0 \text{ tale che } \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \text{ vale } f(x) = g(x).$$

   Si verifichi che $\sim$ è una relazione di equivalenza compatibile con le operazioni $\oplus$ e $\odot$.

Esercizio 3.

1. Si costruisca un campo di cardinalità 8.
2. Trovare il polinomio minimo ed il grado su $\mathbb{Q}$ del numero complesso $5i - 3$.

Esercizio 4.

1. Sia $(L, \leq)$ un reticolo booleano e siano x ed y due elementi di L. Verificare che $(x \wedge y)' = x' \vee y'$.
2. Verificare che un insieme ordinato totalmente è un reticolo distributivo. Può essere un reticolo booleano?