Prova scritta di Algebra 1
29 gennaio 2007

Esercizio 1.

1. Siano $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ due applicazioni, verificare che se f e g sono biettive allora $g \circ f : X \to Z$ è biettiva.

2. Sia U un insieme e sia $\mathcal{P}(U)$ il suo insieme delle parti. Definiamo la relazione $\sim$ in $\mathcal{P}(U)$ nel seguente modo:

   $$X \sim Y \text{ se e solo se esiste } f : X \to Y \text{ biettiva}$$

   Dimostrare che $\sim$ è una relazione di equivalenza.

Esercizio 2. Nell'insieme $\mathbb{Q}^2 = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ si consideri la seguente operazione:

$$(a, b) \bullet (c, d) = \left(2ac, \frac{bd}{2}\right)$$

1. Si verifichi che $(\mathbb{Q}^2, \bullet)$ è un monoide commutativo.

2. Si verifichi che $(\mathbb{Q}^2, \bullet)$ non è un gruppo. Si individuino poi quali sono gli elementi invertibili e i loro inversi.

3. Si consideri l'applicazione $\pi : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}$ con $\pi(a, b) = 2a$. Si verifichi se π è un omomorfismo di monoidi dove in $\mathbb{Q}^2$ si considera l'operazione $\bullet$ ed in $\mathbb{Q}$ si considera l'usuale prodotto fra numeri razionali.

Esercizio 3.

1. Si consideri in S_8 la permutazione $\tau = (1, 2, 4, 6)(6, 7, 8)$. Si calcolino il segno, le orbite, la scomposizione in cicli disgiunti e una scomposizione in trasposizioni delle seguenti permutazioni τ, τ^2, τ^3.

2. Sia S_n il gruppo simmetrico su n oggetti, sia A_n il sottoinsieme di S_n costituito dalle permutazioni pari. Si verifchi che A_n è un sottogruppo di S_n, che A_n è normale in S_n e che il gruppo quoziente S_n/A_n ha due elementi.

Esercizio 4. Per ogni G gruppo, possiamo definire il seguente sottoinsieme

$$Z(G) = \{g \in G | hg = gh \quad \forall h \in G\}.$$

1. Verificare che $Z(G)$ è un sottogruppo di G e che $Z(G)$ è normale in G.

2. Dimostrare che se K è un sottogruppo normale di G allora $Z(K)$ è un sottogruppo normale di G.