Prova scritta di Algebra 1
28 settembre 2009

Risolvere i **quattro** esercizi proposti **motivando** adeguatamente le risposte.

Esercizio 1. Sia $\mathbb{Z}_n$ il quoziente di $\mathbb{Z}$ rispetto alla relazione di congruenza modulo n.

1. Verificare se $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_4$ con $f(z) = [2z]$ è un'applicazione suriettiva.
2. Verificare se $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_3$ con $f(z) = [2z]$ è un'applicazione suriettiva.
3. Sia k un numero naturale, si dimostri che $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_{12}$ con $f(z) = [kz]$ è un'applicazione suriettiva se e solo se k è coprimo con 12.

Esercizio 2. Sia G un gruppo, sia $\sim$ la relazione in G definita nel seguente modo

$$g \sim g' \text{ se e solo se esiste } h \in G \text{ tale che } hgh^{-1} = g'.$$

1. Verificare che $\sim$ è una relazione di equivalenza.
2. Dimostrare che due elementi di G in relazione rispetto a $\sim$ hanno lo stesso ordine.
3. Individuare le classi di equivalenza di $\sim$ se G coincide con $\mathbb{S}_3$, il gruppo simmetrico su tre oggetti.

Esercizio 3. Sia R un anello commutativo con unità. Fissato a un elemento di R, definiamo l'insieme $< a >$ nel seguente modo:

$$< a >= \{ra \,|\, r \in R\}.$$

1. Verificare che $< a >$ è un ideale di R contenente a.
2. Dimostrare che l'insieme $< a >$ coincide con l'intersezione di tutti gli ideali che contengono a.
3. Siano a e b elementi in R, dimostrare che $< a > \subseteq < b >$ se e solo se esiste $c \in R$ tale che $a = bc$.

Esercizio 4.

1. Si trovi un epimorfismo del reticolo L_1 nel reticolo L_2, aventi rispettivamente i seguenti diagrammi.

2. Sia L un reticolo distributivo e limitato, sia $l \in L$ e siano x ed y due complementi di l, si verifichi che $x = y$.