Prova scritta di Algebra 2
28 gennaio 2008

Esercizio 1.

1. Sia G un gruppo, sia $x \in G$ un elemento di ordine n e sia k un numero intero; si dimostri che x^k ha ordine n se e solo se k è coprimo con n.

2. Sia C un gruppo ciclico e A e B due suoi sottogruppi. Consideriamo la seguente proprietà:

   $$\text{(P) Se } A \cap B = \{e\} \text{ allora } A = \{e\} \text{ o } B = \{e\}.$$

   Provare che

   a. se C è finito di ordine pq, con p e q due primi distinti, allora P è falsa;

   b. se C è finito di ordine p^n, con p numero primo, allora P è vera.

Esercizio 2. Sia R un anello commutativo con unità e sia a un elemento di R; definiamo

$$(a) = \{ra | r \in R\}$$

1. Dimostrare che (a) è un ideale di R che contiene a. Verificare inoltre che se J è un ideale di R contenente a allora $(a) \subseteq J$.

2. Verificare che $(a) = R$ se e solo se a è invertibile.

3. Sia R un dominio Euclideo; indichiamo con d il grado in R. Dati due elementi a e b in $R \setminus \{0_R\}$ dimostrare che se $(a) = (b)$ allora $d(a) = d(b)$.

Esercizio 3.

1. Verificare quali dei seguenti quozienti sono campi:

   $$\mathbb{Q}[x]/(x^2+1); \quad \mathbb{Z}_5[x]/(x^2+1); \quad \mathbb{Z}_7[x]/(x^4+2x^2+1).$$

2. Trovare il polinomio minimo ed il grado su $\mathbb{Q}$ del numero reale $2 - \sqrt{7}$.

Esercizio 4. Sia $(L, \leq)$ un reticolo booleano ed x ed y due elementi di L. Verificare i seguenti fatti:

1. $x \vee y = y$ se e solo se $x \leq y$;

2. $x \wedge y = 0$ se e solo se $x \leq y'$;

3. $x \leq y$ se e solo se $x' \geq y'$.