**Prova scritta di Algebra 1**
**28 gennaio 2008**

**Esercizio 1.**

1. Sia $R$ una relazione sull'insieme $X$. Si verifichi che $R$ è di equivalenza se e solo se sono soddisfatte le seguenti condizioni:
   a. per ogni $a \in X$ vale che $aRa$;
   b. se $aRb$ e $bRc$ allora $cRa$.
2. Verificare che le seguenti relazioni sono di equivalenza:
   a. su $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $(a,b)R(c,d)$ se e solo se $a+d=b+c$;
   b. su $\mathbb{R}$, $x \sim y$ se e solo se $x^2 = y^2$.

**Esercizio 2.** Nell'insieme $\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ si consideri la seguente operazione:

$$(a,b) \bullet (c,d) = (ac - bd, ad + bc.)$$

1. Si verifichi che $(\mathbb{Z}^2, \bullet)$ è un monoide commutativo.
2. Si verifichi che $(\mathbb{Z}^2, \bullet)$ non è un gruppo. Si individuino poi quali sono gli elementi invertibili e i loro inversi.
3. Si verifichi se i seguenti sottoinsiemi sono sottomonoidi di $(\mathbb{Z}^2, \bullet)$:
$$A = \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} | b = 0\}; \quad B = \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} | a = 0\}.$$

**Esercizio 3.** Sia $f : \mathbb{Z}_n \longrightarrow \mathbb{Z}_n$ l'applicazione definita da $f([x]_n) = [x^2]_n$

1. Dimostrare che $f$ è ben definita.
2. Trovare un intero $n \geq 2$ per cui $f : \mathbb{Z}_n \longrightarrow \mathbb{Z}_n$ è iniettiva e un altro intero $n \geq 2$ per cui $f : \mathbb{Z}_n \longrightarrow \mathbb{Z}_n$ non è iniettiva.

**Esercizio 4.** Sia $G$ un gruppo e $H$ un suo sottogruppo. Definiamo

$$C_G(H) = \{g \in G | \, gh = hg \text{ per ogni } h \in H\}$$

1. Dimostrare che $C_G(H)$ è un sottogruppo di $G$;
2. Dimostrare che per ogni $f \in G$ vale che $fC_G(H)f^{-1} = C_G(fHf^{-1})$.
3. Dimostrare che se $H$ è un sottogruppo normale di $G$ allora $C_G(H)$ è un sottogruppo normale di $G$.