Prova scritta di Algebra 2
26 giugno 2003

Esercizio 1.

1. Dimostrare che la caratteristica di $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$ è uguale a $m.c.m(m, n)$, il minimo comune multiplo fra m ed n.

2. Sia f un omomorfismo di anelli $f : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m \longrightarrow \mathbb{Z}_q$. Si verifichi che se q e $m.c.m(m, n)$ sono coprimi, allora f manda tutti gli elementi di $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$ nello zero di $\mathbb{Z}_q$.

Esercizio 2. Si considerino in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ le due operazioni seguenti:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$
$$(a, b) \star (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

1. Si dimostri che $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +, \star)$ è un anello commutativo con unità.

2. Si considerino i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$:

$$A = \{(a, b) | a = b\} \quad B = 3\mathbb{Z} \times 3\mathbb{Z} \quad C = 3\mathbb{Z} \times 9\mathbb{Z}.$$

   Verificare quali di questi sottoinsiemi sono dei sottoanelli o degli ideali di $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +, \star)$.

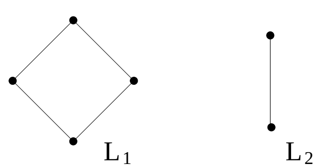
Esercizio 3.

1. Si costruisca un campo di cardinalità 27.

2. Si verifichi che $\mathbb{Q}[x]/(x^4 + x^2 + 2)$ è un campo.

Esercizio 4.

1. Si trovi un epimorfismo del reticolo L_1 nel reticolo L_2, aventi rispettivamente i seguenti diagrammi.



2. Sia L un reticolo distributivo e limitato, sia $l \in L$ e siano x ed y due complementi di l, si verifichi che $x = y$.