Prova scritta di Algebra 1
26 giugno 2003

Esercizio 1. Verificare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ $n > 0$ abbiamo che:

$$1 - 4 + 9 + \cdots + (-1)^{n-1}n^2 = \frac{(-1)^{n-1}n(n+1)}{2}.$$

Esercizio 2. Nell'insieme $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ definiamo l'operazione $\star$ nel seguente modo:

$$(a, b) \star (c, d) = (ac, bc + d).$$

1. Si mostri che $(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, \star)$ è un gruppo.

2. Definiamo la relazione $\sim$ ponendo $(a, b) \sim (a', b')$ se e solo se $a = a'$. Si verifichi che $\sim$ è una relazione di equivalenza compatibile con $\star$.

$(\mathbb{R}^* = \{r \in \mathbb{R} | r \neq 0\})$

Esercizio 3. Sia G un gruppo e g un elemento di G.

1. Definiamo $\gamma_g : G \to G$ ponendo $\gamma_g(x) = gxg^{-1}$; verificare che γ_g è un isomorfismo di gruppi.

2. Mostrare che $Int(G) = \{\gamma_g : g \in G\}$ è un sottogruppo normale di $Aut(G)$, il gruppo degli isomorfismi da G in G (gli automorfismi di G).

3. Mostrare che il gruppo $Int(G)$ è isomorfo al gruppo quoziente $G/Z(G)$ dove $Z(G) = \{y \in G | yg = gy$ per ogni $g \in G\}$ è il centro di G.

Esercizio 4. Si consideri in S_7 la permutazione $\tau = (1, 2)(7, 5, 6)$.

1. Si calcolino il segno, le orbite, la scomposizione in cicli disgiunti e una scomposizione in trasposizioni delle seguenti permutazioni τ, τ^2, τ^3.

2. Si verifichi se esiste una permutazione μ tale che $\mu\tau\mu^{-1} = (1, 2, 3, 4, 5, 6)$.