Prova scritta di Algebra 2
25 settembre 2006

Esercizio 1.

1. Dimostrare che $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_4$ è isomorfo a $\mathbb{Z}_{20}$.
2. Dimostrare che $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_3$ e $\mathbb{Z}_{18}$ non sono due gruppi isomorfi.
3. Mostrare un gruppo di ordine sei non abeliano.

Esercizio 2.

1. Siano I e J due ideali in A anello commutativo; dimostrare che $I + J = \{i + j | i \in I \text{ e } j \in J\}$ e $I \cap J$ sono due ideali di A.
2. In $\mathbb{Z}$ si considerino i due ideali (n) e (m) generati rispettivamente da n e m interi non nulli. Si dimostri che il generatore di $(n) + (m)$ è il massimo comun divisore di n ed m. Chi è il generatore di $(n) \cap (m)$? (si verifichi esplicitamente la veridicità della risposta)

Esercizio 3.

1. Verificare quali dei seguenti quozienti sono campi:
$$\mathbb{Q}[x]/(x^2 - 2); \quad \mathbb{R}[x]/(x^2 - 2); \quad \mathbb{Z}_7[x]/(x^3 + x + 1)$$
2. Si consideri in $\mathbb{Q}[x]$ il polinomio $p(x) = x^4 + 3x^2 + 2$; si trovi un'estensione di $\mathbb{Q}$ in cui $p(x)$ ammette una radice e se ne indichi il grado.

Esercizio 4.

1. Sia $(L, \leq)$ un reticolo limitato; fissato a un elemento di L, definiamo $\phi : L \longrightarrow L$ con $\phi(x) = x \wedge a$. Si dimostri che ϕ è iniettiva se e solo se a è il massimo di L.
2. Sia $(L, \leq)$ un reticolo booleano, dimostrare che per ogni $x, y \in L$ abbiamo che $(x \wedge y)' = x' \vee y'$, cioè che il complemento di $x \wedge y$ è $x' \vee y'$.