Prova scritta di Algebra 2
25 marzo 2003

Esercizio 1. Sia G un gruppo abeliano e siano x ed y due elementi di G; supponiamo che x abbia ordine n ed y abbia ordine m. Si verifichino i seguenti fatti.

1. L'ordine di xy divide il minimo comune multiplo di m ed n.
2. Se m ed n sono coprimi xy ha ordine mn.

Esercizio 2. Si considerino i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$.

$$A = \{a + b\sqrt{3} |\, a,\, b \in \mathbb{Z}\}$$
$$B = \{3n + m\sqrt{3} |\, n,\, m \in \mathbb{Z}\}$$

1. Si dimostri che A e B sono sottoanelli di $\mathbb{R}$.
2. Si simostri che B è un ideale in A.
3. Si dimostri che B è un ideale massimale di A.

Esercizio 3.

1. Si costruisca un campo di cardinalità 8.
2. Si dica quali fra i seguenti anelli sono campi:

$$\mathbb{Z}_7[x]/(x^2 + x + 1) \quad \mathbb{R}[x]/(x^2 + x + 1).$$

Esercizio 4. Sia $(L, \leq)$ un reticolo booleano ed x ed y due elementi di L. Verificare i seguenti fatti:

1. $x \wedge y = x$ se e solo se $x \leq y$;
2. $x \leq y$ se e solo se $x' \vee y = 1$.