Prova scritta di Algebra 1
25 marzo 2003

Esercizio 1. Sia $f : A \to B$ un'applicazione; verificare le seguenti affermazioni.

1. Per ogni X ed Y sottoinsiemi di A vale che $f(X \cap Y) \subseteq f(X) \cap f(Y)$.
2. L'applicazione f è iniettiva se e solo se per ogni X ed Y sottoinsiemi di A abbiamo che $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$.

Esercizio 2. Nell'insieme $\mathbb{R}$ definiamo l'operazione $\star$ ponendo $x \star y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$.

1. Si mostri che $(\mathbb{R}, \star)$ è un gruppo abeliano.
2. Sia $+$ l'usuale somma in $\mathbb{R}$. Si verifichi che $f : (\mathbb{R}, \star) \to (\mathbb{R}, +)$ definito da $f(x) = x^3$ è un isomorfismo di gruppi.

Esercizio 3. Sia G un gruppo e siano H e K due sottogruppi di G. Supponiamo che H sia normale in G e si verifichino i seguenti fatti.

1. $HK = KH$
2. HK è un sottogruppo di G

Esercizio 4.

1. Si trovi un sottogruppo di S_4 isomorfo a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.
2. Si consideri in S_9 la permutazione $\tau = (1, 2, 3, 7)(5, 7, 8, 9)(3, 4, 5)$; si calcolino τ^{-1} e la sua scomposizione in cicli disgiunti.