

**Prova scritta di Algebra 2**  
**23 giugno 2008**

**Esercizio 1.** 1. Sia  $C_{15}$  un gruppo ciclico di ordine quindici; fissato un generatore, individuare i sottogruppi di  $C_{15}$  e per ogni sottogruppo tutti i possibili generatori

2. Trovare tutti gli omomorfismi di gruppo da  $\mathbb{Z}_{17}$  a  $\mathbb{Z}_{15}$  e da  $\mathbb{Z}_3$  a  $\mathbb{Z}_6$ .

**Esercizio 2.** Sia  $R$  un anello con unità.

1. Verificare che se un elemento ha un inverso destro e un inverso sinistro i due inversi coincidono.

2. Verificare che l'insieme dei divisori dello zero in  $A$  e l'insieme degli elementi invertibili in  $A$  sono due insiemi disgiunti (con intersezione vuota).

3. Verificare che se  $A$  ha un numero finito di elementi e  $a$  è un elemento non nullo per cui esiste  $b \neq 0_R$  tale che  $ba = 0_R$  allora esiste  $c \neq 0_R$  tale che  $ac = 0_R$ .

**Esercizio 3.** 1. Trovare il polinomio minimo ed il grado su  $\mathbb{Q}$  del numero complesso  $1 - i\sqrt{7}$ .

2. Trovare un'estensione del campo  $\mathbb{Z}_7$  in cui il polinomio

$$p(x) = x^5 + 2x^3 + x - x^4 - 2x^2 - 1 \in \mathbb{Z}_7[x]$$

è riducibile in fattori lineari (di grado 1).

**Esercizio 4.** Sia  $(L, \leq)$  un reticolo booleano.

1. Mostrare che il complemento di ogni elemento è unico.

2. Siano  $y$  e  $z$  due elementi in  $L$ , mostrare che se esiste  $x \in L$  tale che:

$$y \wedge x = z \wedge x \text{ e } y \wedge x' = z \wedge x'$$

allora  $y = z$ .