Prova scritta di Algebra 1
23 giugno 2008

Esercizio 1. Sia X un insieme e sia $\mathcal{P}(X)$ l'insieme delle parti di X.

1. Si dimostri che $(\mathcal{P}(X), \cup)$ è un monoide abeliano.
2. Verificare quali sono gli elementi invertibili di $(\mathcal{P}(X), \cup)$
3. Sia $B \subseteq X$ e sia $f_B : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ l'applicazione definita da $f_B(A) = B \cup A$; dimostrare che f_B è un omomorfismo fra monoidi se e solo se B è l'insieme vuoto.

Esercizio 2. Si considerino le seguenti due relazioni sull'insieme $\mathbb{Z}$:
ρ definita per ogni $a, b \in \mathbb{Z}$ da $a\rho b$ se e solo se $a = b$ oppure $a = -b$;
τ definita per ogni $a, b \in \mathbb{Z}$ da $a\tau b$ se e solo se $a = b$ oppure $ab = 5$.

1. Si verifichi che ρ e τ sono relazioni di equivalenza.
2. Si verifichi quali fra ρ e τ sono compatibili con l'addizione fra numeri interi.
3. Si verifichi quali fra ρ e τ sono compatibili con la moltiplicazioni fra numeri interi.

Esercizio 3.

1. Sia S_7 il gruppo simmetrico su 7 oggetti; si consideri $F = \{\tau \in S_7 | \tau(1) = 1\}$. Si dimostri che F è un sottogruppo di S_7.
2. Sia S_n il gruppo simmetrico su n oggetti e sia $X \subset \{1, 2, \ldots, n\}$; si consideri $F_X = \{\tau \in S_n | \tau(i) = i \quad \forall i \in X\}$. Si dimostri che F_X è un sottogruppo di S_n.
3. Sia $X \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ e F_X il sottogruppo di S_n definito al punto precedente; se X ha k elementi quanti elementi contiene F_X. (Giustificare adeguatamente la risposta)

Esercizio 4. Sia $f : G \longrightarrow G'$ un omomorfismo di gruppi.

1. Si dimostri che $\mathrm{Ker}(f) = \{g \in G | f(g) = 1_G\}$ è un sottogruppo normale di G.
2. Si dimostri che $\mathrm{Ker}(f) = \{1_G\}$ se e solo se f è un'applicazione iniettiva.
3. Si dimostri che esiste una biezione fra il quoziente $\frac{G}{\mathrm{Ker}(f)}$ e $f(G)$.