Prova scritta di Algebra 2
22 settembre 2008

Esercizio 1. 1. Individuare l'ordine di ciascun elemento contenuto in un gruppo ciclico di ordine quindici.

2. Siano G e H due gruppi e sia $f : G \to H$ un omomorfismo di gruppi iniettivo. Si dimostri che se $g \in G$ ha ordine n allora $f(g)$ ha ancora ordine n.

Esercizio 2. Si considerino i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{C}$ (campo dei numeri complessi).

$$A = \{a + ib\sqrt{15} |\, a,\, b \in \mathbb{Z}\}$$
$$B = \{15n + im\sqrt{15} |\, n,\, m \in \mathbb{Z}\}$$

1. Si dimostri che A e B sono sottoanelli di $\mathbb{C}$.

2. Si dimostri che B è un ideale in A.

3. Si verifichi se B è un ideale massimale o primo di A.

Esercizio 3. 1. Trovare il polinomio minimo ed il grado su $\mathbb{Q}$ del numero complesso $i - \sqrt{5}$.

2. Trovare un estensione del campo $\mathbb{Z}_5$ in cui il polinomio

$$p(x) = x^5 + 4x^3 + 4x + x^4 + 4x^2 + 4 \in \mathbb{Z}_5[x]$$

è riducibile in fattori lineari (di grado 1).

Esercizio 4. 1. Sia X un insieme fissato dimostare che $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ è un reticolo di Boole.

2. Verificare se esiste un epimorfismo di reticoli dal reticolo $(\mathcal{P}(\{0,1\}), \subseteq)$ al reticolo L rappresentato dal seguente diagramma: