Prova scritta di Algebra 1
22 settembre 2008

Esercizio 1. Siano A e B due insiemi.

1. Verificare che $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$.
2. Verificare che $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$.
3. Si mostri un esempio in cui $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \neq \mathcal{P}(A \cup B)$.

(se X è un insieme, $\mathcal{P}(X)$ indica l'insieme delle parti di X)

Esercizio 2. Nell'insieme $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definiamo la relazione $\sim$ ponendo

$$(n, m) \sim (n', m') \text{ se e solo se } n + m' = m + n'.$$

1. Si mostri che $\sim$ è una relazione di equivalenza.
2. Sia $\star$ l'operazione definita da $(n, m) \star (n', m') = (nn' + mm', nm' + mn')$; si dimostri che $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ è un monoide.
3. Si verifichi se l'operazione $\star$ è compatibile con la relazione $\sim$.

Esercizio 3.

1. Sia G un gruppo; si verifichi che se per a, b, c elementi di G vale che $ca = cb$ allora $a = b$ (Legge di cancellazione a sinistra). Mostrare un esempio di un monoide in cui non vale la legge di cancellazione a sinistra.
2. Sia S un semigruppo in cui vale la legge di cancellazione a sinistra. Fissato s un elemento di S di definisca un'applicazione $L_s : S \to S$ nel seguente modo $L_s(x) = sx$ per ogni $x \in S$; si dimostri che L_s è iniettiva.
3. Sia S un semigruppo con un numero finito di elementi in cui valgono le leggi di cancellazione a destra e a sinistra; si dimostri che S è un gruppo.

Esercizio 4.

1. Si consideri in S_9 la permutazione
$$\tau = (1, 2, 4, 3)(4, 8)(3, 4, 7)(7, 5, 9)$$
si calcolino per τ e per τ^{-1} la scomposizione in cicli disgiunti.
2. Sia μ un ciclo in S_n, dimostrare che μ^{-1} è un ciclo.
3. Sia μ una permutazione in S_n, dimostrare che per ogni $\tau \in S_n$ la permutazione $\tau\mu\tau^{-1}$ ha lo stesso segno di μ.