Prova scritta di Algebra 2
22 settembre 2003

Esercizio 1. Si considerino in $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ le due operazioni seguenti:

$$(a, b, c) + (d, e, f) = (a + d, b + e, c + f)$$

$$(a, b, c) \cdot (d, e, f) = (ad, ae + bf, cf)$$

1. Verificare che $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ è un anello con unità.
2. Verificare che $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ non è un anello commutativo.
3. Individuare gli elementi invertibili in $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.
4. Individuare gli elementi (a, b, c) di $\mathbb{R}^3$ per cui vale la proprietà che per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ si abbia $(a, b, c) \cdot (x, y, z) = (x, y, z) \cdot (a, b, c)$.

Esercizio 2.

1. Nell'anello $\mathbb{Z}_3[x]$ si scomponga in fattori irriducibili il polinomio $x^5 + 2x$.
2. Trovare il polinomio minimo ed il grado su $\mathbb{Q}$ del numero reale $\sqrt{3}+\sqrt{5}$.

Esercizio 3.

1. Sia R un anello commutativo con unità; si provi che R è un campo se e solo se gli unici ideali di R sono $\{0\}$ ed R.
2. Sia $\phi : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_m$ un omomorfismo di anelli con n, m numeri interi positivi e n sia un numero primo. Dimostrare che se $m < n$ allora ϕ è l'omomorfismo nullo.

Esercizio 4.

1. Sia $(L, \leq)$ un reticolo limitato, dimostrare che 0 è l'unico complemento di 1 e che 1 è l'unico complemento di 0.
2. Sia $(L, \leq)$ un reticolo booleano, dimostrare che per ogni $x, y \in L$ abbiamo che $(x \wedge y)' = x' \vee y'$, cioè che il complemento di $x \wedge y$ è $x' \vee y'$