

Prova scritta di Algebra 1
22 giugno 2009

Risolvere i **quattro** esercizi proposti **motivando** adeguatamente le risposte.

Esercizio 1. Siano \sim e ρ le seguenti relazioni in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$(x, y) \sim (a, b) \text{ se e solo se } x^2 + y^2 = a^2 + b^2$$

$$(x, y) \rho (a, b) \text{ se e solo se } x^2 + y^2 \leq a^2 + b^2$$

1. Dimostrare che \sim è una relazione di equivalenza.
2. Sia $\mathbb{R} \times \mathbb{R} / \sim$ l'insieme quoziente rispetto a \sim . Dimostrare che la funzione $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} / \sim \rightarrow \{t \in \mathbb{R} \mid t \geq 0\}$ con $f([(x, y)]_{\sim}) = x^2 + y^2$ è ben definita ed è una funzione biettiva.
3. La relazione ρ è una relazione d'ordine?

Esercizio 2. Dati a e b elementi di \mathbb{R} , si definisca $f_{a,b} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione tale che $f_{a,b}(x) = ax + b$. Sia $X = \{f_{a,b} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ l'insieme di queste funzioni al variare di a e b in \mathbb{R} .

1. Dimostrare che, se si considera \circ la composizione di funzioni, la coppia (X, \circ) è un monoide.
2. Individuare quali degli elementi di (X, \circ) sono invertibili.
3. Dimostrare che $X_1 = \{f_{1,b} \mid b \in \mathbb{R}\}$ è un sottomonoido di (X, \circ) .

Esercizio 3. Sia R un anello commutativo con unità e I un ideale di R .

1. Dimostrare che I è un ideale primo se e solo se R/I è un dominio d'integrità.
2. Dimostrare che I è un ideale primo se e solo per ogni J e K ideali di R tali che $JK \subseteq I$ allora o $J \subseteq I$ oppure $K \subseteq I$.

(JK è l'ideale costituito dalle somme finite di elementi del tipo jk con $j \in J$ e $k \in K$)

Esercizio 4. Siano L e L' due reticoli. Un omomorfismo di reticoli è una funzione $f : L \rightarrow L'$ tale che $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$ e $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$ per ogni $x, y \in L$.

1. Si dimostri che se $f : L \rightarrow L'$ è un omomorfismo di reticoli allora $x \leq y$ implica $f(x) \leq f(y)$ per ogni $x, y \in L$.
2. Si dimostri che il viceversa della precedente proposizione non è verificato.