Prova scritta di Algebra 2
21 marzo 2005

Esercizio 1. 1. Individuare quali delle seguenti coppie sono costituite da due gruppi isomorfi (motivare la risposta).

a) $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_2$ e $\mathbb{Z}_{12}$ b) $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$ e $\mathbb{Z}_{12}$
c) $\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{21}$ e $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{35}$
d) $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2$ e $\mathbb{S}_3$ (gruppo simmetrico su tre oggetti)

2. Dimostrare che $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ non è un gruppo ciclico.

Esercizio 2. 1. Siano I e J due ideali in A anello commutativo; dimostrare che $I + J = \{i + j | i \in I \text{ e } j \in J\}$ e $I \cap J$ sono due ideali di A.

2. In $\mathbb{Z}$ si considerino i due ideali (n) e (m) generati rispettivamente da n e m interi non nulli. Si dimostri che il generatore di $(n) + (m)$ è il massimo comun divisore di n ed m. Chi è il generatore di $(n) \cap (m)$? (si verifichi esplicitamente la veridicità della risposta)

Esercizio 3. 1. Verificare quali dei seguenti quozienti sono campi:

$$\mathbb{Z}_3[x]/(x^2 + x + 1); \quad \mathbb{Z}_5[x]/(x^2 + x + 1); \quad \mathbb{Z}_5[x]/(x^4 + 4)$$

2. Trovare il polinomio minimo ed il grado su $\mathbb{Q}$ del numero reale $\sqrt{5}+\sqrt{3}$.

Esercizio 4. Sia $(L, \leq)$ un reticolo ed x ed y due elementi di L. Verificare i seguenti fatti:

1. $x \wedge y = x$ se e solo se $x \leq y$;

2. $x \leq y$ se e solo se $\forall z \in L$ vale che $x \wedge z \leq y \wedge z$.