Prova scritta di Algebra 1
20 febbraio 2006

Esercizio 1. Siano A e B due insiemi.

1. Verificare che $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$.
2. Verificare che $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$.
3. Si mostri un esempio in cui $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \neq \mathcal{P}(A \cup B)$.

(se X è un insieme, $\mathcal{P}(X)$ indica l'insieme delle parti di X)

Esercizio 2. Nell'insieme $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^* = \{(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | b \neq 0\}$ si definisca un'operazione $\star$ ponendo

$$(a,b) \star (c,d) = (a+c, b \cdot d)$$

per ogni (a,b) e $(c,d) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$

1. Si dimostri che $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, \star)$ è un gruppo.
2. Sia $\sim$ la relazione in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ definita da

   $$(a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c.$$

   Si verifchi che $\sim$ è una relazione d'equivalenza.
3. Si verifichi se $\sim$ è compatibile con $\star$.

Esercizio 3. Sia S_n il gruppo simmetrico su n oggetti con $n \geq 3$; si consideri il seguente insieme: $F = \{\tau \in S_n | \tau(1) = 1\}$.

1. Si dimostri che F è un sottogruppo di S_n.
2. Si dimostri che F non è un sottogruppo normale di S_n.
3. Si verifichi qual è l'indice di F in S_n.

Esercizio 4. Sia G un gruppo.

1. Verificare che se G è abeliano allora ogni sottogruppo di G è normale.
2. Verificare che se G è abeliano allora per ogni sottogruppo H di G il quoziente G/H è abeliano.
3. Dare un esempio di un gruppo G non abeliano che contiene un sottogruppo normale H che è abeliano e tale che il quoziente G/H è un gruppo abeliano.