Prova scritta di Algebra 1
19 giugno 2006

Esercizio 1. Sia X un insieme e sia $\mathcal{P}(X)$ l'insieme delle parti di X.

1. Si dimostri che $(\mathcal{P}(X), \cap)$ è un monoide abeliano.
2. Sia $B \subseteq X$ e sia $f_B : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ l'applicazione definita da $f_B(A) = B \cap A$; dimostrare che f_B è suriettiva se e solo se $B = X$.

Esercizio 2. Consideriamo il gruppo $(\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ dove $\cdot$ è l'usuale moltiplicazione fra numeri reali.

1. Sia $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}^*$ l'applicazione definita da $f(r) = r^2$; dimostrare che f è un omomorfismo di gruppi.
2. Sia $\sim_f$ la relazione definita da $r \sim_f r' \Leftrightarrow r^2 = (r')^2$; verificare che $\sim_f$ è una relazione d'equivalenza.
3. Dimostrare che $\sim_f$ e $\cdot$ sono compatibili.
4. Quale rapporto sussiste fra i gruppi quoziente $\mathbb{R}^*/\sim_f$ e $\mathbb{R}^*/\mathrm{Ker}(f)$?

Esercizio 3.

1. Si consideri in S_8 la permutazione $\tau = (1, 2, 3, 4)(4, 5, 6)$. Si calcolino il segno, le orbite, la scomposizione in cicli disgiunti e una scomposizione in trasposizioni delle seguenti permutazioni τ, τ^2, τ^3.
2. Si verifichi se in S_6 esiste una permutazione μ tale che $\mu(1, 2, 3)(1, 2)\mu^{-1} = (1, 2, 3)(4, 5, 6)$.
3. Si verifichi se in S_6 esiste una permutazione μ tale che $\mu(1, 2, 3)(4, 5)\mu^{-1} = (5, 4, 3)(1, 2)$.

Esercizio 4. Sia G gruppo abeliano; fissato n un intero positivo definiamo

$$I_n(G) = \{g \in G | g^n = 1_G\}$$

1. Dimostrare che $I_n(G)$ è un sottogruppo di G.
2. Dimostrare che $I_n(G)$ è normale in G.
3. Dimostrare che se n divide m allora $I_n(G) \subseteq I_m(G)$.