Prova scritta di Algebra 2
19 febbraio 2007

Esercizio 1.

1. Individuare quali delle seguenti coppie sono costituite da due gruppi isomorfi (motivare la risposta).

   a) $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_8$ e $\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_7$ b) $\mathbb{Z}_{28}$ e $\mathbb{Z}_{14} \times \mathbb{Z}_2$
   c) $\mathbb{Z}_{28}$ e $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_7$ d)$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$ e $\mathbb{D}_4$ (gruppo diedrale di ordine 8)

2. Dimostrare che se G è un gruppo di ordine quattro allora G è abeliano.

Esercizio 2. Siano I e J due ideali bilateri di un anello A.

1. Si verifichi che $I + J = \{i + j | i \in I \text{ e } j \in J\}$ è un ideale bilatero di A.
2. Si verifichi che l'insieme IJ costituito dalle somme finite di elementi del tipo ij con $i \in I$ e $j \in J$ è un ideale bilatero di A.
3. Si verifichi che $IJ \subseteq (I \cap J)$.
4. Nel caso $A = \mathbb{R}[x]$, $I = (x^2 - 1)$ e $J = (x^2 - 2x + 1)$, mostrare che $IJ \neq (I \cap J)$.

Esercizio 3.

1. Nell'anello $\mathbb{Z}_7[x]$ si scomponga in fattori irriducibili il polinomio $x^6 + 2x^4 + x^2$.
2. Trovare il polinomio minimo ed il grado su $\mathbb{Q}$ del numero reale $\sqrt{5}+\sqrt{7}$.

Esercizio 4.

1. Sia X un insieme fissato dimostare che $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ è un reticolo di Boole.
2. Verificare se esiste un epimorfismo di reticoli dal reticolo $(\mathcal{P}(\{0, 1\}), \subseteq)$ al reticolo $(\mathcal{P}(\{0\}), \subseteq)$.