Prova scritta di Algebra 1
19 febbraio 2007

Esercizio 1. Sia $f : A \to B$ un'applicazione.

1. Verificare che f è iniettiva se e solo se per ogni $A' \subseteq A$ abbiamo che $A' = f^{-1}(f(A'))$.

2. Siano $\mathcal{P}(A)$ e $\mathcal{P}(B)$ gli insiemi delle parti di A e di B; definiamo l'applicazione $f^\star : \mathcal{P}(B) \longrightarrow \mathcal{P}(A)$ dove $f^\star(B') = f^{-1}(B')$. Verificare che f è iniettiva se e solo se $f^\star$ è suriettiva.

Esercizio 2. Nell'insieme $\mathbb{R}$ si definisca un'operazione $\star$ ponendo

$$a \star b = a + b - a \cdot b$$

dove $+$ è l'usuale somma fra numeri reali e $\cdot$ è l'usuale moltiplicazione.

1. Si dimostri che $(\mathbb{R}, \star)$ è un monoide abeliano.

2. Individuare gli elementi invertibili di $(\mathbb{R}, \star)$.

3. Si dimostri che $f : (\mathbb{R}, \star) \to (\mathbb{R}, \cdot)$ con $f(a) = 1 - a$ è un omomorfismo di monoidi invertibile.

Esercizio 3.

1. Sia $\tau \in S_6$ il ciclo $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$. Si calcolino il segno, le orbite, la scomposizione in cicli disgiunti e una scomposizione in trasposizioni delle seguenti permutazioni: τ, τ^2, τ^3 e τ^{-1}.

2. Sia τ un ciclo di lunghezza sei in S_n (con $n \geq 6$), verificare se:

   - esiste una permutazione μ tale che $\mu\tau\mu^{-1} = \tau^2$;
   - esiste una permutazione μ tale che $\mu\tau\mu^{-1} = \tau^3$;
   - esiste una permutazione μ tale che $\mu\tau\mu^{-1} = \tau^{-1}$.

Esercizio 4. Sia $f : G \to G'$ un omomorfismo di gruppi.

1. Verificare che $\mathrm{Ker}(f) = \{g \in G \mid f(g) = 1_{G'}\}$ è un sottogruppo normale di G.

2. Sia H soottogruppo di G, dimostrare che $f^{-1}(f(H)) = H \cdot \mathrm{Ker}(f)$ dove $H \cdot \mathrm{Ker}(f) = \{hg | h \in H \text{ e } g \in \mathrm{Ker}(f)\}$.

3. Dimostrare che il gruppo quoziente $f^{-1}(f(H))/\mathrm{Ker}(f)$ è isomorfo al gruppo $f(H)$.