

Prova scritta di Algebra 2
18 marzo 2004

Esercizio 1. 1. Sia C_{15} il gruppo ciclico di ordine quindici; fissato un generatore, individuare i sottogruppi di C_{15} e per ogni sottogruppo i generatori.

2. Sia C un gruppo ciclico e A e B due suoi sottogruppi. Consideriamo la seguente proprietà:

$$(P) \text{ Se } A \cap B = \{e\} \text{ allora } A = \{e\} \text{ o } B = \{e\}.$$

Provare che

- (a) se C è infinito allora P è vera;
- (b) se C è finito di ordine 8 allora P è vera;
- (c) se C è finito di ordine 12 allora P è falsa.

Esercizio 2. Sia A un anello commutativo con unità, poniamo

$$\eta(A) = \{a \in A \mid \text{esiste } n \in \mathbb{N} \text{ t.c. } a^n = 0\}.$$

Provare che:

- 1. se A è un dominio d'integrità $\eta(A) = \{0\}$;
- 2. se P è un ideale primo di A allora $\eta(A) \subseteq P$;
- 3. $\eta(A)$ è un ideale di A .

Esercizio 3. 1. Trovare il polinomio minimo ed il grado su \mathbb{Q} del numero reale $\sqrt{5} - \sqrt{2}$.

2. Si costruisca un campo di cardinalità 8.

Esercizio 4. 1. Sia (L, \leq) un reticolo, dimostrare che per ogni $x, y, z \in L$

$$x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z).$$

2. Sia (L, \leq) un reticolo booleano, dimostrare che per ogni $x, y \in L$ abbiamo che $(x \vee y)' = x' \wedge y'$, cioè che il complemento di $x \vee y$ è $x' \wedge y'$.