Prova scritta di Algebra 1
18 marzo 2004

Esercizio 1. Verificare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ abbiamo che $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ è divisibile per 7.

Esercizio 2. Nell'insieme $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R} = \{(\alpha, \beta) | \alpha,\ \beta \in \mathbb{R},\ \alpha \neq 0\}$ si definisca un'operazione $\cdot$ ponendo

$$(\alpha, \beta) \cdot (\alpha', \beta') = (\alpha\alpha', \alpha\beta' + \frac{\beta}{\alpha'})$$

per ogni (α, β) e $(\alpha', \beta') \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

1. Si dimostri che $(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, \cdot)$ è un gruppo.
2. Si dimostri che $S = \{(\alpha, \beta) | \alpha,\ \beta \in \mathbb{R},\ \alpha = 1\}$ è un sottogruppo di $(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, \cdot)$.
3. Sia $f : (\mathbb{R}, +) \longrightarrow (\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, \cdot)$ definita da $f(\beta) = (1, \beta)$; dimostrare che è un omomorfismo iniettivo di gruppi.

Esercizio 3. Sia $f : G \to G'$ un omomorfismo di gruppi.

1. Si provi che se N' è un sottogruppo normale di G' allora $f^{-1}(N')$ è un sottogruppo normale di G.
2. Si provi che se N è un sottogruppo normale di G allora $f(N)$ è un sottogruppo normale di $f(G)$.
3. Si trovi un esempio in cui N è un sottogruppo normale di G ma $f(N)$ non è un sottogruppo normale di G'.

Esercizio 4.

1. Si consideri in S_8 la permutazione $\tau = (1,3)(2,7)(1,4)(2,6)(5,8)$. Si calcolino il segno, le orbite, la scomposizione in cicli disgiunti e una scomposizione in trasposizioni delle seguenti permutazioni τ, τ^2, τ^3.
2. Si verifichi se in S_6 esiste una permutazione μ tale che $\mu(1,2,3,4,5,6)\mu^{-1} = (1,2,3)(4,5,6)$.
3. In un gruppo simmetrico S_n si considerino due trasposizioni σ e σ', si verifichi che esiste $\mu \in S_n$ tale che $\mu\sigma\mu^{-1} = \sigma'$.