Prova scritta di Algebra 2
18 giugno 2007

Esercizio 1.

1. Sia C_{12} un gruppo ciclico di ordine dodici; fissato un generatore, individuare i sottogruppi di C_{12} e per ogni sottogruppo tutti i possibili generatori.
2. Individuare tutti i possibili omomorfismi da C_3, gruppo ciclico di ordine tre, in C_6, gruppo ciclico di ordine sei. Si verifichi esplicitamente che quelli individuati sono omomorfismi fra gruppi e che non ci possono essere ulteriori omomorfismi.

Esercizio 2.

1. Sia A un anello commutativo, sia I un ideale di A e sia B un sottoanello di A; sia $\pi : A \longrightarrow A/I$ con $\pi(x) = x+I$ la proiezione sul quoziente. Si verifichi che π è un omomorfismo suriettivo di anelli e si verifichi che $\pi^{-1}(\pi(B)) = B + I = \{b + i \,|\, b \in B \text{ e } i \in I\}$.
2. Sia A un anello commutativo e siano I e J due ideali di A si dimostri che l'anello quoziente $A/(I \cap J)$ è isomorfo ad un sottoanello di $A/I \times A/J$, il prodotto fra i due anelli quozienti A/I e A/J.

Esercizio 3.

1. Trovare il polinomio minimo ed il grado su $\mathbb{Q}$ del numero reale $\sqrt{5} - 7$.
2. Sia R un dominio Euclideo e siano a e b due elementi non nulli in R; si denoti con M un massimo comun divisore di a e b. Si dimostri che esite m tale che $mM = ab$ e si dimostri che m è un minimo comune multiplo di a e b.

(si dice che m è minimo comune multiplo di a e b se valgono le seguenti due condizioni: (1) a e b dividono m (2) se a e b dividono h allora m divide h)

Esercizio 4. Sia $(L, \leq)$ un reticolo. Un sottoinsieme I di L si dice un ideale di L se valgono le tre proprietà seguenti: (1) $I \neq \emptyset$ (2) se x, $y \in I$, allora $x \vee y \in I$ (3) se $x \in I$, $a \in L$ e $a \leq x$, allora $a \in I$.

1. Si dimostri che ogni ideale è un sottoreticolo di L.
2. Si dimostri che se $a \in L$, allora il sottoinsieme $(a) = \{x \in L | x \leq a\}$ di L è un ideale di L.