Prova scritta di Algebra 1
18 giugno 2007

Esercizio 1. Siano $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ due applicazioni.

1. Dimostrare che se g e f sono iniettive allora $g \circ f$ è iniettiva.
2. Dimostrare che se $g \circ f$ è iniettiva allora f è iniettiva.
3. Trovare un esempio in cui $g \circ f$ è iniettiva ma g non è iniettiva.

Esercizio 2. Nell'insieme $F = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0\,, \forall x \in \mathbb{R}\}$, costituito da tutte le applicazioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che non assumono il valore 0, definiamo l'operazione $\star$ nel seguente modo:

$$\text{per ogni } x \in \mathbb{R} \quad f \star g(x) = f(x) \cdot g(x).$$

1. Si mostri che $(F, \star)$ è un gruppo abeliano.
2. Sia $\sim$ la seguente relazione in F:

   $$f \sim g \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} \text{ tale che } \forall x \in (k, +\infty) \text{ vale che} f(x) = g(x).$$

   Si verifichi che $\sim$ è una relazione di equivalenza.
3. Si dimostri che l'operazione $\star$ è compatibile con $\sim$.

Esercizio 3. Sia $f : G \longrightarrow G'$ un omomorfismo di gruppi.

1. Si dimostri che $\mathrm{Ker}(f)$ è un sottogruppo di G.
2. Si dimostri che $f(G)$ è un sottogruppo di G'.
3. Si supponga che G sia un gruppo finito con 7 elementi e G' sia un gruppo finito con 13 elementi; quanti sono gli omomorfismi di gruppo fra G e G'? (si verifichi la risposta)

Esercizio 4.

1. Si consideri in S_9 la permutazione $\tau = (3, 4, 7, 5)(5, 7, 2)(2, 4, 9)$; si calcolino per τ e per τ^{-1} la scomposizione in cicli disgiunti.
2. Sia μ un ciclo in S_n, dimostrare che μ^{-1} è un ciclo .
3. Sia μ una permutazione in S_n, dimostrare che μ e μ^{-1} hanno lo stesso segno.