Prova scritta di Algebra 1
18 dicembre 2003

Esercizio 1. Sia X un insieme e sia $\mathcal{P}(X)$ l'insieme delle parti di X.

1. Sia $\chi : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ l'applicazione definita da $\chi(A) = X \setminus A$; dimostrare che χ è una biezione.
2. Sia $B \subseteq X$ e sia $f_B : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ l'applicazione definita da $f_B(A) = B \cup A$; dimostrare che f_B è iniettiva se e solo se $B = \emptyset$.

Esercizio 2. Nell'insieme $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definiamo l'operazione $\star$ nel seguente modo:

$$(a, b) \star (a', b') = (aa', ab' + ba').$$

1. Verificare che $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \star)$ è un monoide abeliano.
2. Sia $\sim$ la relazione definita da $(a, b) \sim (a', b') \Leftrightarrow a^2 = (a')^2$; verificare che $\sim$ è una relazione d'equivalenza.
3. Dimostrare che $\sim$ e $\star$ sono compatibili.
4. Si consideri l'applicazione $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/\sim$ definita da $\phi(a) = [(a, 0)]_\sim$; dimostrare che ϕ è un isomorfismo fra il monoide moltiplicativo $(\mathbb{N}, \cdot)$ e il monoide quoziente $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/\sim, \star)$.

Esercizio 3.

1. Si consideri il monoide abeliano $(\mathbb{Z}_6, \cdot)$, si costruisca la tabella moltiplicativa e si indichi quali sono gli elementi che amettono inverso.
2. Sia n un intero positivo e si consideri il monoide abeliano $(\mathbb{Z}_n, \cdot)$; si caraterizzino gli elementi che ammettono inverso.

Esercizio 4. Sia G un gruppo, sia H un sottogruppo di G e sia N un sottogruppo normale di G. Si verifichino i seguenti fatti.

1. $H \cap N$ è un sottogruppo normale di H.
2. $HN = \{hn \mid h \in H \text{ e } n \in N\}$ è un sottogruppo di G.
3. $HN = NH$.