Prova scritta di Algebra 2
17 settemmbre 2007

Esercizio 1.

1. Dimostrare che l'anello $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_7$ ha caratteristica 21.
2. Dimostrare che se un campo K ha caratteristica diversa da zero allora la caratteristica è un numero primo.

Esercizio 2. Sia R una anello commutatvo con unità e I un ideale di R.

1. Dimostrare che I è un ideale primo se e solo se R/I è un dominio d'integrità.
2. Dimostrare che I è un ideale primo se e solo per ogni J e K ideali di R tali che $JK \subseteq I$ allora o $J \subseteq I$ oppure $K \subseteq I$.

(JK è l'ideale costituito dalle somme finite di elementi del tipo jk con $j \in J$ e $k \in K$)

Esercizio 3.

1. Verificare se il quoziente $\frac{\mathbb{Q}[x]}{(x^4+x^2+1)}$ è un campo.
2. Trovare il polinomio minimo ed il grado su $\mathbb{Q}$ del numero complesso $1 - i\sqrt{3}$.

Esercizio 4. Sia X un insieme; si consideri $\{0,1\}^X$ l'insieme delle applicazioni da X in $\{0,1\}$. Si consideri in $\{0,1\}^X$ la relazione ρ definita nel seguente modo:

$$f \rho g \text{ se e solo se } f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in X.$$

1. Si dimostri che ρ è una relazione d'ordine.
2. Si dimostri che $f \vee g : X \longrightarrow \{0,1\}$ definita da $f \vee g(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ è l'estremo superiore di f e g in $(\{0,1\}^X, \rho)$.
3. Si dimostri che $f \wedge g : X \longrightarrow \{0,1\}$ definita da $f \wedge g(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ è l'estremo inferiore di f e g in $(\{0,1\}^X, \rho)$.