Prova scritta di Algebra 1
17 gennaio 2005

Esercizio 1. Verificare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ abbiamo che $n^3 + 5n$ è divisibile per 3.

Esercizio 2. Nell'insieme $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ definiamo l'operazione $\star$ nel seguente modo:

$$(\alpha, \beta) \star (\alpha', \beta') = (\alpha \cdot \alpha', \alpha \cdot \beta' + \beta \cdot \alpha').$$

1. Verificare che $(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, \star)$ è un gruppo.
2. Dimostrare che $\Gamma = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \mid \alpha = 1\}$ è un sottogruppo normale di $(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, \star)$.
3. Sia $\phi : (\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, \star) \to (\mathbb{R}^*, \cdot)$ l'applicazione definita da $\phi(\alpha, \beta) = \alpha$; verificare che ϕ è un omomorfismo suriettivo di gruppi ed esplicitare il nucleo di ϕ.

($\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $\cdot$ rappresenta l'usuale moltiplicazione in $\mathbb{R}$)

Esercizio 3.

1. Sia G un gruppo; si verifichi che se per a, b, c elementi di G vale che $ac = bc$ allora $a = b$ (Legge di cancellazione a destra).
2. Sia S un semigruppo in cui vale la legge di cancellazione a destra. Fissato s un elemento di S di definisca un'applicazione $L_s : S \to S$ nel seguente modo $L_s(x) = xs$ per ogni $x \in S$; si dimostri che L_s è iniettiva.
3. Sia S un semigruppo con un numero finito di elementi in cui valgono le leggi di cancellazione a destra e a sinistra; si dimostri che S è un gruppo.

Esercizio 4. Siano n, m e q numeri naturali diversi da 0 tali che $m = nq$. Si definisca $f : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_m$ ponendo $f([x]_n) = [qx]_m$; si dimostri che:

1. f è ben definita;
2. f è iniettiva.