Prova scritta di Algebra 2
16 settembre 2004

Esercizio 1. 1. Dimostrare che $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$ è isomorfo a $\mathbb{Z}_{12}$.

2. Dimostrare che $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$ e $\mathbb{Z}_8$ non sono due gruppi isomorfi.

3. Mostrare un gruppo di ordine sei non abeliano.

Esercizio 2. Siano I e J due ideali bilateri di un anello A; si verifichino i seguenti fatti

1. $I \cap J$ è un ideale bilatero di A;

2. l'insieme IJ costituito dalle somme finite di elementi del tipo ij con $i \in I$ e $j \in J$ è un ideale bilatero di A;

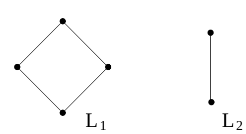
3. $IJ \subseteq (I \cap J)$

Esercizio 3. 1. Verificare quali dei seguenti quozienti sono campi:

$$\mathbb{Q}[x]/(x^2+1); \quad \mathbb{Z}_5[x]/(x^2+1); \quad \mathbb{Z}_5[x]/(x^2+x+1)$$

2. Sia K un campo e $K[x]$ l'anello dei polinomi a coefficienti in K. Siano $p(x)$ e $q(x)$ due polinomi in $K[x]$; si dimostri che il massimo comune divisore di $p(x)$ e $q(x)$ è un generatore dell'ideale somma $(p(x))+(q(x))$.

Esercizio 4. 1. Si trovi un epimorfismo del reticolo L_1 nel reticolo L_2, aventi rispettivamente i seguenti diagrammi.



2. Dimostrare che non esiste alcun epimorfismo fra i reticoli aventi i seguenti diagrammi: