Prova scritta di Algebra 1
16 settembre 2004

Esercizio 1. Verificare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ abbiamo che:

$$\sum_{k=0}^{n}(3k+1) = 1+4+7+\cdots+(3n+1) = \frac{1}{2}(n+1)(3n+2)$$

Esercizio 2. Nell'insieme $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ si consideri la seguente operazione:

$$(a,b) \bullet (c,d) = (ac-bd, ad+bc.)$$

1. Si verifichi che $(\mathbb{R}^2, \bullet)$ è un monoide commutativo.
2. Si verifichi che $(\mathbb{R}^2, \bullet)$ non è un gruppo. Si individuino poi quali sono gli elementi invertibili e i loro inversi.
3. Si verifichi che la relazione di equivalenza $\sim$ definita nel seguente modo

   $$(a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow a^2+b^2 = c^2+d^2$$

   è compatibile con l'operazione $\bullet$.

Esercizio 3. Sia $f : G \longrightarrow G'$ un omomorfismo di gruppi.

1. Si dimostri che $\mathrm{Ker}(f) = \{1_G\}$ se e solo se f è un'applicazione iniettiva.
2. Si dimostri che esiste una biezione fra il quoziente $\frac{G}{\mathrm{Ker}(f)}$ e $f(G)$.

Esercizio 4. Si consideri in S_6 la permutazione $\tau = (1,3,4)(2,6)$.

1. Si calcolino il segno, le orbite, la scomposizione in cicli disgiunti e una scomposizione in trasposizioni delle seguenti permutazioni τ, τ^2, τ^3.
2. Si dimostri che $\tau = \tau^{6k+1}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.