Prova scritta di Algebra 1
16 febbraio 2009

Esercizio 1. Sia X un insieme e sia $\mathcal{P}(X)$ l'insieme delle parti di X.

1. Sia $\chi : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ l'applicazione definita da $\chi(A) = X - A = A^c$; dimostrare che χ è invertibile trovando l'inversa di χ.

2. Sia $B \subseteq X$ e sia $f_B : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ l'applicazione definita da $f_B(A) = B \cup A$; dimostrare che f_B è suriettiva se e solo se $B = \emptyset$.

Esercizio 2. Sia G un gruppo, sia $f \in G$ un elemento con ordine finito n.

1. Sia k un numero intero; verificare che $f^k = 1_G$ se e solo se k è un multiplo di n.

2. Sia H un sottogruppo normale di G e supponiamo che il laterale fH abbia ordine m nel quoziente G/H; verificare che n è un multiplo di m.

3. Sia H un sottogruppo con ordine due e normale in G; supponiamo che m, l'ordine di fH in G/H, sia dispari. Verificare che nel laterale fH esiste un elemento di G di ordine m.

Esercizio 3. Sia $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'insieme di tutte le applicazioni da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{R}$.
Siano $\oplus$ e $\odot$ le operazioni in $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ definite nel seguente modo:

$$(f \oplus g)(n) = f(n) + g(n) \quad (f \odot g)(n) = f(n)g(n)$$

dove $f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ e $n \in \mathbb{N}$.

1. Si dimostri che $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \oplus, \odot)$ è un anello commutativo con unità .

2. Sia $\sim$ la seguente relazione:

   $$f \sim g \text{ se e solo se } \exists k \in \mathbb{N} \text{ tale che } f(n) - g(n) = 0 \, \forall \, n \geq k$$

   Dimostrare che $\sim$ è una relazione di equivalenza.

3. Verificare se $\sim$ è compatibile con le operazioni $\oplus$ e $\odot$.

Esercizio 4.

1. Si dimostri che in un reticolo L l'estremo inferiore e l'estremo superiore soddisfano le seguenti proprietà:

$$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c) \text{ per ogni } a,\ b,\ c \in L$$

$$(a \wedge b) \vee a = a \text{ per ogni } a,\ b \in L$$

2. Si mostri un esempio di reticolo non distributivo (motivando adeguatamente il fatto che il reticolo non gode della proprietà distributiva).