Prova scritta di Algebra 1
16 dicembre 2004

Esercizio 1. Sia $f : A \to B$ un'applicazione.

1. Si verifichi che l'applicazione f è iniettiva se e solo se per ogni $A' \subseteq A$ abbiamo che $A' = f^{-1}(f(A'))$.
2. Sia $F : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$ l'applicazione dall'insieme delle parti di A all'insieme delle parti di B cosí definita $F(A') = f(A')$; verificare che se f è iniettiva allora F è iniettiva.

Esercizio 2. Nell'insieme $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ si definisca un'operazione $\star$ ponendo

$$(a, b) \star (c, d) = (ac, c \cdot b + d)$$

per ogni (a, b) e $(c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

1. Si dimostri che $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \star)$ è un monoide.
2. Individuare gli elementi invertibili di $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \star)$.
3. Sia $f : (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \star) \to (\mathbb{Z}, \cdot)$ l'applicazione definita da $f(a, b) = a$; dimostrare che f è un omomorfismo di monoidi ($\cdot$ rappresenta l'usuale moltiplicazione fra numeri interi).

Esercizio 3.

1. Si considerino in S_6 le permutazioni $\tau = (1, 2, 3, 4)$ e $\mu = (3, 6, 5)$. Si calcolino il segno, le orbite, la scomposizione in cicli disgiunti e una scomposizione in trasposizioni delle seguenti permutazioni $\tau \circ \mu$, $(\tau \circ \mu)^2$ e $(\tau \circ \mu)^3$.
2. Si verifichi se esiste una permutazione $\mu \in S_6$ tale che
$$\mu(1, 2, 3)(4, 5, 6)\mu^{-1} = (1, 2)(3, 4)(5, 6).$$
3. Sia τ una permutazione dispari in S_n, verificare se esiste μ in S_n tale che $\mu\tau\mu^{-1} = \tau^2$

Esercizio 4. Sia G un gruppo e g un elemento di G; definiamo

$$C_G(g) = \{h \in G | hgh^{-1} = g\}.$$

1. Verificare che $C_G(g)$ è un sottogruppo di G.
2. Verificare che l'insieme $\{hC_G(g) | h \in G\}$ composto dai laterali sinistri di $C_G(g)$ è in biezione con l'insieme $\{hgh^{-1} | h \in G\}$.