Prova scritta di Algebra 1
16 dicembre 2002

Esercizio 1. Sia $f : A \to B$ un'applicazione; verificare le seguenti proposizioni.

1. Per ogni A' sottoinsieme di A abbiamo che $A' \subset f^{-1}(f(A'))$
2. L'applicazione f è iniettiva se e solo se per ogni $A' \subset A$ abbiamo che $A' = f^{-1}(f(A'))$.

Esercizio 2. Sia $\{0,1\}^{\mathbb{R}}$ l'insieme di tutte le applicazioni di $\mathbb{R}$ nell'insieme con due elementi $\{0,1\}$. Su $\{0,1\}^{\mathbb{R}}$ si definisca per ogni f, $g \in \{0,1\}^{\mathbb{R}}$

$$(f \star g)(x) = f(x) + g(x) - f(x)g(x)$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$.

1. Si dimostri che $(\{0,1\}^{\mathbb{R}}, \star)$ è un semigruppo.
2. Per ogni sottoinsieme A di $\mathbb{R}$ sia
$$S_A = \{f | f \in \{0,1\}^{\mathbb{R}}, f(a) = 0 \quad \forall a \in A\}.$$
Si dimostri che S_A è un sottosemigruppo di $\{0,1\}^{\mathbb{R}}$.
3. Si dimostri che se $A \subset B \subset \mathbb{R}$, allora $S_B \subset S_A$, e che $S_\emptyset = \{0,1\}^{\mathbb{R}}$.
4. Si dimostri che nel semigruppo $(\{0,1\}^{\mathbb{R}}, \star)$ vale che $f^2 = f$ per ogni $f \in \{0,1\}^{\mathbb{R}}$.

Esercizio 3. Si consideri in S_6 la permutazione $\tau = (1,2,3)(5,6)$.

1. Si calcolino il segno, le orbite, la scomposizione in cicli disgiunti e una scomposizione in trasposizioni delle seguenti permutazioni τ, τ^2, τ^3.
2. Si verifichi se esiste una permutazione μ tale che $\mu\tau\mu^{-1} = (3,4)(5,6)$.

Esercizio 4. Sia G un gruppo, sia

$$Z(G) = \{g \in G | hg = gh \quad \forall h \in G\}.$$

1. Verificare che $Z(G)$ è un sottogruppo di G.
2. Verificare che $Z(G)$ è normale in G.
3. Dimostrare che se $G/Z(G)$ è un gruppo ciclico allora G è abeliano.