Prova scritta di Algebra 2
11 febbraio 2008

Esercizio 1.

1. Dimostrare che l'anello $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_4$ ha caratteristica 12.
2. Siano m ed n due numeri interi maggiori od uguali a due; dimostrare che se n e m sono coprimi la caratteristica dell'anello $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$ è nm.

Esercizio 2. Sia R una anello commutatvo con unità e I un ideale di R.

1. Dimostrare che I è un ideale primo se e solo se R/I è un dominio d'integrità.
2. Dimostrare che I è un ideale primo se e solo per ogni J e K ideali di R tali che $JK \subseteq I$ allora o $J \subseteq I$ oppure $K \subseteq I$.

(JK è l'ideale costituito dalle somme finite di elementi del tipo jk con $j \in J$ e $k \in K$)

Esercizio 3.

1. Si consideri in $\mathbb{Z}_7[x]$ il polinomio $p(x) = x^4 + 8x^2 + 16$; si trovi un'estensione di $\mathbb{Z}_7$ in cui $p(x)$ ammette una radice e se ne indichi il grado.
2. Si considerino in $\mathbb{Q}[x]$ i due ideali (x^2+x) e (x^2); si calcoli un generatore dell'ideale somma $I = (x^2 + x) + (x^2)$.

Esercizio 4.

1. Sia $(X, \leq)$ un reticolo. Dimostrare che per ogni $x, y, z \in X$ vale che
$$x \wedge (y \vee z) \geq (x \wedge y) \vee (x \wedge z).$$
2. Verificare se esiste un epimorfismo di reticoli dal reticolo $(\mathcal{P}(\{0,1\}), \subseteq)$ al reticolo L rappresentato dal seguente diagramma: