Prova scritta di Algebra 1
11 febbraio 2008

Esercizio 1. Sia $f : A \to B$ un'applicazione; verificare le seguenti proposizioni.

1. L'applicazione f è suriettiva se e solo se per ogni $B' \subset B$ abbiamo che $B' = f(f^{-1}(B'))$.

2. L'applicazione f è iniettiva se e solo se per ogni coppia di applicazioni $u, v : C \longrightarrow A$ tali che $f \circ v = f \circ u$ allora $u = v$.

Esercizio 2. Sia $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'insieme di tutte le applicazioni da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{R}$.

Sia $\star$ l'operazione in $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ definita da $(f \star g)(n) = f(n) + g(n)$ dove $f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ e $n \in \mathbb{N}$.

1. Si dimostri che $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \star)$ è un gruppo.

2. Sia $\sim$ la seguente relazione:
$$f \sim g \text{ se e solo se } \exists k \in \mathbb{N} \text{ tale che } f(n) - g(n) = 0 \,\forall\, n \geq k$$
Dimostrare che $\sim$ è una relazione di equivalenza.

3. Verificare se $\sim$ è compatibile con l'operazione $\star$.

Esercizio 3. Sia M un monoide.

1. Verificare che se $f, g : M \to M$ sono due omomorfismi del monoide M in se allora anche $f \circ g : M \to M$ è un omomorfismo di monoidi.

2. Definiamo $H(M) : \{f : M \to M | f \text{ è un omomorfismo}\}$; verificare che $H(M)$ è un monoide con la composizioni di applicazioni $\circ$. In quali casi $H(M)$ può essere un gruppo con l'operazione $\circ$?

3. Sia $\mathbb{Z}_n$ il monoide costituito dagli interi modulo n con l'operazione indotta dall'addizione in $\mathbb{Z}$. Verificare quali sono gli elementi di $H(\mathbb{Z}_2)$ e $H(\mathbb{Z}_3)$.

Esercizio 4.

1. Sia S un gruppo in cui per ogni $x \in S$ abbiamo $x = x^{-1}$. Dimostrare che S è abeliano.

2. Sia G un gruppo; definiamo G' il sottoinsieme di G costituito dai prodotti di un numero finito di elementi del tipo $xyx^{-1}y^{-1}$ con $x, y \in G$. Verificare che G' è un sottogruppo di G, che G' è normale in G e che il quoziente G/G' è un gruppo abeliano.