Prova scritta di Algebra 2
10 luglio 2006

Esercizio 1. 1. Individuare, motivando la risposta, quali delle seguenti coppie sono costituite da due gruppi isomorfi.

a) $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_7$ e $\mathbb{Z}_{42}$ b) $\mathbb{Z}_{70} \times \mathbb{Z}_6$ e $\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{35}$
c) $\mathbb{Z}_{15} \times \mathbb{Z}_{28}$ e $\mathbb{Z}_{20} \times \mathbb{Z}_{21}$
d) $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_2$ e $\mathbb{D}_{10}$ (gruppo diedrale di ordine 10)

2. Costruire esplicitamente un isomorfismo di gruppi fra $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_3$ e $\mathbb{Z}_{15}$ (si effettuino tutte le verifiche necessarie a dimostrare che la relazione descritta è un isomorfismo di gruppi).

Esercizio 2. Sia S un insieme. Nell'insieme delle parti $\mathcal{P}(S)$ si definisce l'operazione $\triangle$ (differenza simmetrica):

$$X \triangle Y = (X \cup Y) \setminus (X \cap Y)$$

per ogni X e Y in $\mathcal{P}(S)$.

1. Provare che la struttura algebrica $(\mathcal{P}(S), \triangle, \cap)$ è un anello commutativo con unità (si tralasci la verifica dell'associatività delle operazioni).

2. Provare che tutti gli elementi di $\mathcal{P}(S)$, tranne S e $\emptyset$, sono divisori dello zero.

3. Sia $Y \in \mathcal{P}(S)$, determinare l'ideale generato da Y in $(\mathcal{P}(S), \triangle, \cap)$. Verificare che se S è finito, allora ogni ideale di $(\mathcal{P}(S), \triangle, \cap)$ è principale

Esercizio 3. 1. Trovare il polinomio minimo ed il grado su $\mathbb{Q}$ del numero reale $\sqrt{5} + 2$.

2. Verificare quali dei seguenti quozienti sono campi:

$$\mathbb{R}[x]/(x^2 + 2); \quad \mathbb{Z}_3[x]/(x^2 + 2); \quad \mathbb{Z}_3[x]/(x^2 + 1).$$

3. Si considerino in $\mathbb{Q}[x]$ i due ideali $(x+1)$ e $(x+2)$; si calcoli un generatore dell'ideale somma $I = (x + 1) + (x + 2)$.

Esercizio 4. 1. Dimostrare che in un reticolo distributivo e limitato se un elemento ha un complemento allora tale complemento è unico.

2. Sia $(L, \leq)$ un reticolo booleano e siano $x, y \in L$; dimostrare che $x \vee y = 1$ se e solo se $x \vee y' = x$.