Prova scritta di Algebra 1
10 luglio 2006

Esercizio 1. Se X è un insieme, indichiamo con X^X l'insieme delle applicazioni da X in X.

1. Si dimostri che X^X, con la composizione di applicazioni, è un monoide.
2. Si dimostri che le applicazioni suriettive formano un sottomonoide.
3. Si dimostri che, se esiste una biezione fra due insiemi X ed Y, esiste una biezione fra X^X e Y^Y.

Esercizio 2. Nell'insieme $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R} = \{(a,b) | a,\, b \in \mathbb{R},\, a \neq 0\}$ si definisca un'operazione $\cdot$ ponendo

$$(a,b) \cdot (c,d) = (ac, ad + bc^{-1})$$

per ogni (a,b) e $(c,d) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

1. Si dimostri che $(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, \cdot)$ è un gruppo.
2. Si dimostri che $S = \{(a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} |\, b = 0\}$ è un sottogruppo di $(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, \cdot)$.
3. Verificare se S è un sottogruppo normale di $(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, \cdot)$.

Esercizio 3. Sia G un gruppo, si verifichino le seguenti proprietà.

1. Se G ha due o tre elementi, allora G è abeliano.
2. Se per ogni a, b elementi di G vale che $(ab)^2 = a^2b^2$, allora G è abeliano.
3. Se per ogni a, b elementi di G vale che $(ab)^i = a^ib^i$ per tre interi i consecutivi, allora G è abeliano.

Esercizio 4.

1. Si consideri in S_8 la permutazione $\tau = (1,2)(3,4)(5,6)(4,5)$. Si calcolino il segno, le orbite, la scomposizione in cicli disgiunti e una scomposizione in trasposizioni delle seguenti permutazioni τ, τ^2, τ^3.
2. Si verifichi se in S_8 esiste una permutazione μ tale che $\mu(1,2,3,4,5)\mu^{-1} = (1,2,3)(4,5)$.
3. In un gruppo simmetrico S_n si consideri una permutazione dispari σ, si verifichi se esiste $\mu \in S_n$ tale che $\mu\sigma\mu^{-1} = \sigma^2$.