Prova scritta di Algebra 2
10 gennaio 2003

Esercizio 1. Dimostrare che se n ed m sono coprimi allora il gruppo $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$ è un gruppo ciclico.

Esercizio 2.

1. Si costruisca un campo di cardinalità 125.
2. Si dica quali fra i seguenti anelli sono campi:

$$\mathbb{Z}_3[x]/(x^2+x+1) \quad \mathbb{Q}[x]/(x^2+x+1).$$

Esercizio 3. Sia $f : R \to S$ un omomorfismo di anelli.

1. Si provi che se J è un ideale di S allora $f^{-1}(J)$ è un ideale di R.
2. Si provi che se I è un ideale di R allora $f(I)$ è un ideale di $f(R)$.
3. Si trovi un esempio in cui I è un ideale di R ma $f(I)$ non è un ideale di S.

Esercizio 4.

1. Sia X un insieme fissato dimostare che $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ è un reticolo di Boole.
2. Dimostrare che in un reticolo distributivo e limitato se un elemento ha un complemento allora tale complemento è unico.