Prova scritta di Algebra 1
10 gennaio 2003

Esercizio 1. Verificare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ $n > 0$ abbiamo che $3 \cdot 5^{2n-1} + 2^{3n-2}$ è divisibile per 17.

Esercizio 2. Nell'insieme $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definiamo la relazione $\sim$ ponendo

$$(n, m) \sim (n', m') \text{ se e solo se } n + m' = m + n'.$$

1. Si mostri che $\sim$ è una relazione di equivalenza.

2. Sia $\star$ l'operazione definita da

$$(n, m) \star (n', m') = (nn', mm');$$

   si dimostri che $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ è un monoide.

3. Si verifichi se l'operazione $\star$ è compatibile con la relazione $\sim$.

Esercizio 3. Sia G un gruppo e siano H e K due sottogruppi di G.

1. Verificare che $H \cap K$ è un sottogruppo di G.

2. Verificare che se $G = H \cup K$ allora o $H = G$ o $K = G$.

Esercizio 4. Sia $(\mathbb{Q}, +)$ il gruppo dei numeri razionali, $\mathbb{Z}$ il sottogruppo dei numeri interi e $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ il gruppo quoziente. Si definisca $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ponendo $f(x) = [3x]$. Si dimostri che

1. f è un omomorfismo di gruppi;

2. f è suriettiva;

3. il nucleo di f è un sottogruppo di $\mathbb{Q}$ contenente $\mathbb{Z}$.