Prova scritta di Algebra 2
10 aprile 2003

Esercizio 1.

1. Sia $\mathbb{Z}_{18}$ il gruppo ciclico di ordine diciotto, individuare i suoi sottogruppi e per ogni sottogruppo i generatori.

2. Individuare a quali dei seguenti gruppi è isomorfo il gruppo $\mathbb{Z}_{18}$:

$$\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_3; \quad \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_2.$$

Esercizio 2. Sia R una anello commutatvo con unità e I un ideale di R.

1. Dimostrare che I è un ideale primo se e solo se R/I è un dominio d'integrità.

2. Dimostrare che I è un ideale primo se e solo per ogni J e K ideali di R tali che $JK \subseteq I$ allora o $J \subseteq I$ oppure $K \subseteq I$.

(JK è l'ideale costituito dalle somme finite di elementi del tipo jk con $j \in J$ e $k \in K$)

Esercizio 3.

1. Nell'anello $\mathbb{Z}_5[x]$ si scomponga in fattori irriducibili il polinomio $x^5 + 4x^3 + 4x$.

2. Trovare il polinomio minimo ed il grado su $\mathbb{Q}$ del numero reale $\sqrt{2} - \sqrt{3}$.

Esercizio 4. Sia $(L, \leq)$ un reticolo distributivo ed a un elemento fissato di L e sia $\phi : L \to L$ l'applicazione definata da $\phi(x) = x \vee a$. Dimostrare che ϕ è un omomorfismo di reticoli. Si dimostri poi che le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1. l'applicazione ϕ è un isomorfismo di reticoli;

2. il reticolo L ammette minimo e a è il minimo di L;

3. l'applicazione $\phi : L \to L$ è l'applicazione identica.