Facsimile prima provetta di Geometria 3A

Esercizio 1. Si consideri la seguente curva:

$$\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad \alpha(t) = (t-1, t^5, 2t+3)$$

1. Si verifichi se la curva è biregolare.
2. Ove possibile si calcolino il triedro di Frenet, la curvatura e la torsione della curva.
3. Si verifichi se la curva è piana ed eventualmente si calcoli il piano in cui è contenuta.
4. Si calcoli la circonferenza osculatrice alla curva in $\alpha(1)$.

Esercizio 2. Sia α una curva biregolare parametrizzata lunghezza d'arco. In generale una curva regolare viene detta un'elica se esiste una direzione fissata v tale che l'angolo fra v e una generica retta tangente alla curva sia costante. Dimostrare che la curva α è un'elica se e solo se le rette passanti per $\alpha(s)$ e con direzione $n(s)$ (rette normali a α) sono tutte parallele ad uno stesso piano fissato.

Esercizio 3. Consideriamo $\phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ con $\phi(u,v) = (\frac{u+v}{2}, uv, \frac{u-v}{2})$.

1. Si dimostri che $\phi(\mathbb{R}^2)$ è una superficie regolare e che ϕ è una parametrizzazione locale.
2. Si dimostri che $\phi(\mathbb{R}^2)$ è esprimibile come grafico di una funzione in due variabili.
3. Si verifichi che $\phi(\mathbb{R}^2)$ è orientabile e se ne calcoli un campo di versori normali.
4. Si calcoli il piano tangente a $\phi(\mathbb{R}^2)$ in $(2,4,0)$.