Esercizi - foglio 4

Esercizio 1. Si consideri la curva $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ parametrizzata lungheza d'arco. Sia $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $\phi(x) = Ax + b$ dove $b \in \mathbb{R}^3$ e A è una matrice ortogonale con determinante pari a -1. Si definisca $\beta = \phi \circ \alpha$; che relazioni ci sono fra curvatura, torsione e triedro di Frenet di α e di β?

Esercizio 2. Si consideri la curva $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definita nel seguente modo:

$$\alpha(t) = \begin{cases} (t, e^{-1/t}, 0) & t > 0 \\ (0,0,0) & t = 0 \\ (t, 0, e^{1/t}) & t < 0 \end{cases}$$

1. Si verifichi che α è una curva liscia.
2. Calcolarne la curvatura e, ove possibile, la torsione.
3. Si verifichi che α non è una curva piana.
4. Dove è definita la torsione è nulla ma α non è una curva piana, in apparente contrasto con il teorema di caratterizzazione delle curve piane. Si spieghi il perché.

Esercizio 3. Sia $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la curva definita da

$$\alpha(t) = (2\sqrt{2}t - \text{ sen}t, 2\sqrt{2}\,\text{sen}t + t, 3\cos t).$$

1. Verifcare che α è una curva regolare e si parametrizzi α con lunghezza d'arco.
2. Si calcolino la curvatura, la torsione e il triedro di Frenet di α .
3. Verificare che α è un elica circolare e si trovi A matrice ortogonale con determinante pari a 1 tale che $A\alpha(t) = (a\cos t, a\ \text{sen}t, bt)$.

Esercizio 4. Siano $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ le seguenti curve regolari di $\mathbb{R}^3$:

$$\alpha(t) = (t, \frac{1}{t}, t-1)$$

$$\beta(t) = (t^3 + 2t, t^2 - 2t + 2, 2t - 1)$$

1. Verifcare se qualcuna di queste due curve è piana.
2. Determinare eventuali rette che sono tangenti ad entrambe le curve ed i relativi punti di tangenza.