Esercizi - foglio 3

Esercizio 1. Si consideri la curva $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ con $\alpha(t) = \left(\frac{4}{5}\cos t,\ 1 - \ \text{sen}t,\ -\frac{3}{5}\cos t\right)$.

1. Si verifichi che α è parametrizzata lunghezza d'arco e biregolare.
2. Calcolare il triedro di Frenet, curvatura e torsione.
3. Dimostrare che $\alpha(\mathbb{R})$ è una circonferenza. Calcolare il piano in cui giace, il raggio ed il centro.

Esercizio 2. Si consideri la curva $\alpha : (0, +\infty) \to \mathbb{R}^3$ con $\alpha(t) = \left(t,\ 1 + \frac{1}{t},\ -1 + \frac{1}{t}\right)$.

1. Si verifichi che α è una curva piana.
2. Calcolare il triedro di Frenet, curvatura e torsione.
3. Calcolare il piano in cui $\alpha((0, +\infty))$ è contenuto.

Esercizio 3. Sia $\alpha : (-\infty, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la curva data da $\alpha(t) = (e^t \cos t, e^t, e^t\ \text{sen}t)$.

1. Si dimostri che α è una curva regolare e si parametrizzi α con lunghezza d'arco.
2. Si calcolino la curvatura e il triedro di Frenet di α .
3. Si calcoli la circonferenza osculatrice ad α in $\alpha(\pi)$.

Esercizio 4.

1. Supponiamo che tutte le normali di una curva biregolare passino per un punto fissato. Dimostrare che la traccia della curva è contenuta in una circonferenza.
2. Supponiamo che tutte le tangenti di una curva regolare passino per un punto fissato. Dimostrare che la traccia della curva è contenuta in una retta.