

Esercizi per Complementi di Algebra - foglio 5

Esercizio 1. Dimostrare che $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m \cong \mathbb{Z}_{nm}$ se e solo se n e m sono coprimi.

Esercizio 2. Siano K e H due gruppi. Si considerino $\phi : K \rightarrow \text{Aut}(H)$ e $\phi' : K \rightarrow \text{Aut}(H)$ due omomorfismi di gruppi.

Dimostrare che se esiste $\alpha \in \text{Aut}(H)$ tale che $\alpha \circ \phi(k) \circ \alpha^{-1} = \phi'(k)$ per ogni $k \in K$ allora vale che $K \rtimes_{\phi} H \cong K \rtimes_{\phi'} H$.

Esercizio 3. Sia G un gruppo di ordine 30.

1. Dimostrare che G ha un sottogruppo normale di ordine 3 oppure uno di ordine 5.
2. Dimostrare che G ha un sottogruppo normale di ordine 15.
3. Dimostrare che G ha un sottogruppo normale di ordine 3 e uno di ordine 5.
4. Classificare i gruppi di ordine 30.